Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Камчатский государственный университет имени Витуса Беринга»

Рассмотрено и утверждено на заседании
кафедры математики и физики
«14» мая 2019г., протокол №9
зав. кафедрой ________ А.П. Горюшкин

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ (КУРСА, МОДУЛЯ)

Б1.В.23 «Числовые системы»

Направление подготовки (специальность): 44.03.05 «Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки)»

Профили подготовки «Начальное образование» и «Математика»

Квалификация выпускника: бакалавр

Форма обучения: очная (заочная, очно-заочная) очная

Курс ___3______

Семестр 6_____________

Дифференцированный зачет: _6________ **семестр**

Год начала подготовки (по учебному плану) 2018

Петропавловск-Камчатский
2019

Рабочая программа составлена с учетом требований федерального государственного образовательного стандарта высшего образования по направлению подготовки 44.03.05 «Педагогическое образование» (с двумя профилями), утвержденного приказом Министерства образования и науки Российской Федерации от «09» февраля 2016 года № 91.

Разработчик(и):
Профессор кафедры математики и физики
(должность, кафедра)

_______________________ А. П. Горюшкин
(подпись)

1. Цели и задачи освоения дисциплины
2. Место дисциплины в структуре ОП ВО
3. Планируемые результаты обучения по дисциплине
4. Содержание дисциплины
5. Тематическое планирование
6. Самостоятельная работа
7. Тематика контрольных работ, курсовых работ (при наличии)
8. Перечень вопросов на зачет (дифференцированный зачет, экзамен)
9. Учебно-методическое и информационное обеспечение
10. Формы и критерии оценивания учебной деятельности студента
11. Материально-техническая база

1. Цель и задачи освоения дисциплины

Цель освоения дисциплины – обеспечение высокого уровня профессиональных знаний и умений учителя математики, необходимых ему для грамотного и творческого решения вопросов обучения.

Задачи освоения дисциплины.

- дать будущему учителю математики знания и навыки, без которых невозможно правильно и глубоко понимать те сведения, которые учитель должен передать своим ученикам.
- Курс «Числовые системы» имеет непосредственное отношение к вопросам обоснования математики и потому играет особую роль в процессе становления учителя.

2. Место дисциплины в структуре ОП ВО

Блок 1, вариативная часть. Дисциплина изучается на 3 курсе, в 6 семестре. Для изучения дисциплины необходимы знания, умения и компетенции, полученные обучающимися на занятиях по математике в средней общеобразовательной школе и вузовских курсов «Алгебра». «Математическая логика», «Дискретная математика».

3. Планируемые результаты обучения по дисциплине

Процесс изучения дисциплины «Числовые системы» направлен на формирование следующих компетенций в соответствии с ФГОС ВО по направлению подготовки:

Код компетенции	**Наименование компетенции**	**Универсальные дескрипторы сформированности компетенции**
ОК-3	Способность использовать естественнонаучные и математические знания для ориентирования в современном информационном пространстве	**Знать:** основные характеристики и этапы развития естественнонаучной картины мира; место и роль человека в природе; основные способы математической обработки данных; основы современных технологий сбора, обработки и представления информации; способы применения естественнонаучных и математических знаний в общественной и профессиональной деятельности; современные информационные и коммуникационные технологии; понятие «информационная система», классификацию информационных систем и ресурсов. **Уметь:** ориентироваться в системе математических и естественнонаучных знаний как целостных представлений для формирования научного мировоззрения; применять понятийно-категориальный аппарат, основные законы естественнонаучных и математических наук в социальной и профессиональной деятельности; использовать в своей профессиональной деятельности знания о

		естественнонаучной картине мира; применять методы математической обработки информации; оценивать программное обеспечение и перспективы его использования с учётом решаемых профессиональных задач; управлять информационными потоками и базами данных для решения общественных и профессиональных задач. **Владеть:** навыками использования естественнонаучных и математических знаний в контексте общественной и профессиональной деятельности; навыками математической обработки информации.
ОК-6	Способность к самоорганизации и самообразованию	**Знать:** социально-личностные и психологические основы самоорганизации; основные функциональные компоненты процесса самоорганизации (целеполагание, анализ ситуации, планирование, самоконтроль и коррекция); основные мотивы и этапы самообразования; типы профессиональной мобильности (вертикальная и горизонтальная); структуру профессиональной мобильности (внутренняя потребность в профессиональной мобильности, способность и знаниевая основа профессиональной мобильности, самоосознание личностью своей профессиональной мобильности, сформированное на основе рефлексии готовности к профессиональной мобильности); условия организации профессиональной мобильности; различные виды проектов, их суть и назначение; общую структуру концепции проекта, понимает ее составляющие и принципы их формулирования; о концепциях (концептуальных моделях) проектов в будущей профессиональной деятельности; о правовых и экономических основах разработки и реализации проектов в будущей профессиональной деятельности; системы и стандарты качества, используемые в будущей профессиональной деятельности; принципы, критерии и правила построения суждений, оценок. **Уметь**: в рамках поставленной цели сформулировать взаимосвязанные задачи, обеспечивающие ее достижение, а также

		результаты их выполнения; выбирать оптимальный способ решения задачи, учитывая предоставленные в проекте ресурсы и планируемые сроки реализации данной задачи; представлять в виде алгоритма (по шагам и видам работ) выбранный способ решения задачи; определять время, необходимое на выполнение действий (работ), предусмотренных в алгоритме; документально оформлять результаты проектирования; реализовывать спроектированный алгоритм решения задачи (т. е. получить продукт) за установленное время; оценивать качество полученного результата; грамотно, логично, аргументировано формировать собственные суждения и оценки; оставлять доклад по представлению полученного результата решения конкретной задачи, учитывая установленный регламент выступлений; видеть суть вопроса, поступившего в ходе обсуждения, и грамотно, логично, аргументировано ответить на него; видеть суть критических суждений относительно представляемой работы и предложить возможное направление ее совершенствования в соответствии с поступившими рекомендациями и замечаниями. **Владеть:** способностью формулировать в рамках поставленной цели проекта совокупность взаимосвязанных задач, обеспечивающих ее достижение, определять ожидаемые результаты решения выделенных задач; навыками решения конкретных задач проекта заявленного качества за установленное время; навыками публичного представления результатов решения конкретной задачи проекта; навыками самообразования, планирования собственной деятельности, оценки результативности и эффективности собственной деятельности; навыками организации социально-профессиональной мобильности.
ПК-4	Способность использовать возможности образовательной среды	**Знать:** специфику начального общего, основного общего, среднего общего образования и особенности организации образовательного пространства в условиях

	для достижения личностных, метапредметных и предметных результатов обучения и обеспечения качества учебно-воспитательного процесса средствами преподаваемых учебных предметов	образовательной организации; основные психолого-педагогические подходы к проектированию и организации образовательного пространства (культурно-исторический, деятельностный, личностный) для достижения личностных, метапредметных и предметных результатов обучения и обеспечения качества учебно-воспитательного процесса средствами преподаваемого учебного предмета; основные характеристики и способы формирования безопасной развивающей образовательной среды; современные педагогические технологии реализации компетентностного подхода с учетом возрастных и индивидуальных особенностей обучающихся; методы и технологии поликультурного, дифференцированного и развивающего обучения. **Уметь:** применять современные образовательные технологии, включая информационные, а также цифровые образовательные ресурсы для достижения личностных, метапредметных и предметных результатов обучения; разрабатывать и реализовывать проблемное обучение, осуществлять связь обучения по предмету (курсу, программе) с практикой, обсуждать с обучающимися актуальные события современности; поддерживать в детском коллективе деловую, дружелюбную атмосферу для обеспечения безопасной развивающей образовательной среды; формировать и реализовывать программы развития универсальных учебных действий, образцов и ценностей социального поведения. **Владеть:** навыками планирования и организации учебно-воспитательного процесса, ориентированного на достижение личностных, метапредметных и предметных результатов обучения; навыками регулирования поведения обучающихся для обеспечения безопасной развивающей образовательной среды.

Содержание

ДЕ 1. Обоснование математики

Задача обоснования математики. Аксиоматический метод. Содержательные и формализованные теории. Теория множеств - основа для построения содержательных аксиоматических теорий. Множество с отношениями и алгебраические системы. Интерпретация аксиоматической теории. Непротиворечивость и категоричность. Независимость аксиомы и системы аксиом.

ДЕ 2. Аксиоматика натуральных чисел

Аксиоматическая теория натуральных чисел. Аксиомы Пеано. Формулировка аксиоматической теории натуральных чисел. Содержательная и формальная арифметика.

Модель Пеано. Категоричность аксиоматической теории натуральных чисел. Изоморфизм одноименных систем натуральных чисел. Независимость аксиоматики Пеано. Непротиворечивость аксиоматической теории натуральных чисел.

ДЕ 3. Математическая индукция

Аксиома индукции. Независимость аксиомы индукции, и ее роль в арифметике. Равносильность условия индуктивности, условия минимальности и условия обрыва убывающих цепей.

Доказательство методом математической индукции. О методе полной индукции. Различные виды доказательств по индукции. Индуктивные определения.

Понятие о формализованной теории натуральных чисел. Содержание теорем Гёделя. Аксиома индукции в формализованной и содержательной теориях натуральных чисел. Проблема непротиворечивости арифметики натуральных чисел.

ДЕ 4. Сложение натуральных чисел

Сложение натуральных чисел. Определение сложения тождествами Грассмана. Схема примитивной рекурсии. Существование и единственность суммы. Существование функции «сложение» и ее единственность.

Свойства сложения натуральных чисел. Ассоциативность и коммутативность сложения. Отсутствие нейтрального элемента по сложению в множестве натуральных чисел. Закон аддитивного сокращения. Натуральные кратные элементов аддитивной полугруппы, их свойства.

ДЕ 5. Умножение натуральных чисел

Умножение натуральных чисел. Определение умножения тождествами Грассмана (схемой примитивной рекурсии). Существование и единственность произведения. Существование функции «умножение» и ее единственность.

Свойства умножения натуральных чисел. Дистрибутивность умножения относительно сложения. Ассоциативность и коммутативность умножения. Существование нейтрального элемента по умножению в множестве натуральных чисел.

Закон сокращение и отсутствие делителей нуля в множестве натуральных чисел. Натуральные степени элементов мультипликативной полугруппы, их свойства. Полукольцо натуральных чисел.

ДЕ 5. Порядок на множестве натуральных чисел

Отношение «меньше» на множестве N. Линейная упорядоченность множества натуральных чисел. Основные свойства линейно упорядоченного множества натуральных чисел. Неравенства на множестве натуральных чисел.

Упорядоченные множества и системы. Монотонность сложения и умножения. Упорядоченные полукольца. Вполне упорядоченность полукольца натуральных чисел. Архимедовость порядка на множестве натуральных чисел.

Дискретность полрядка на множестве натуральных чисел. Основные свойства упорядоченного полукольца натуральных чисел. Отрезки натурального ряда. Количественные порядковые числа.

ДЕ 6. Конечное множество

Теоретико-множественная модель системы натуральных чисел. Равномощность и мощность. Конечное множество. Целое неотрицательное число как мощность конечного множества. Линейная упорядоченность множества конечных мощностей..

Сложение и умножение в теоретико-множественной модели $\mathbf{Z}_0$. Сумма как мощность непересекающихся множеств. Существование и единственность суммы. Умножение как мощность декартова произведения. Существование и единственность произведения. Вычитание и деление в $\mathbf{Z}_0$**.**

Свойства сложения и умножения в теоретико-множественной модели. Связь сложения с умножением. Дистрибутивный закон. Монотонность сложения и умножения. Множество конечных множеств как линейно упорядоченное коммутативное полукольцо.

ДЕ 7. Целое число

Упорядоченные множества, группы и кольца. Кольца с неоднозначным и неархимедовским упорядочиванием. Расширение множества с отношениями и алгебраической системы. Изоморфное вложение коммутативных полугрупп с сокращением в группы и полуколец в кольца.

Аксиоматическая теория целых чисел. Кольцо целых чисел как кольцевое расширение полукольца натуральных чисел. Определение кольца целых чисел с помощью понятия разности натуральных чисел.

Построение кольца целых чисел. Непротиворечивость аксиоматической теории целых чисел. Изоморфизм моделей аксиоматики целых чисел (категоричность аксиоматики **Z**).

Свойства кольца целых чисел. Счетность множества целых чисел. Линейная упорядоченность кольца целых чисел. Архимедовость порядка на множестве целых чисел. Дискретность порядка на множестве **Z.** Отношение делимости в кольце целых чисел. Теорема о делении с остатком. Представление целого числа в позиционной системе счисления.

ДЕ 8. Рациональное число

Аксиоматическая теория рациональных чисел. Аксиоматика рациональных чисел. Построение модели теории рациональных чисел как поля частных кольца целых чисел. Непротиворечивость и категоричность аксиоматики рациональных чисел. Арифметические и геометрические модели аксиоматической теории рациональных чисел.

Свойства рациональных чисел. Счетность множеств рациональных чисел. Линейная упорядоченность множества рациональных чисел. Архимедовость порядка на множестве рациональных чисел.

Плотность порядка системы рациональных чисел. Представление рациональных чисел систематическими дробями. Определение допериодической части и длины периода дроби после обращения ее в десятичную.

ДЕ 9. Действительное число

Нормированные поля. Свойства нормы. Архимедовское и неархимедовское нормирование. Сходящиеся и фундаментальные последовательности, и их свойства.

Аксиоматическая теория действительных чисел. Последовательности в нормированных полях.. Сечения Дедекинда. Последовательность стягивающихся отрезков. .Последовательности в нормированных полях. Последовательность Коши. Непрерывность по Дедекинду, Коши, Кантору и Вейерштрассу. Несчетность непрерывно упорядоченного множества. Аксиоматика системы действительных чисел.

Построение поля действительных чисел. Непротиворечивость аксиоматики поля действительных чисел. Действительное число как сечение Дедекинда множеств рациональных чисел.

Действительное число как предел последовательности рациональных чисел, существование корня натуральной степени из положительного действительного числа. Полнота поля действительных чисел. Однозначность упорядочивания поля действительных чисел. Непротиворечивость и категоричность. Теорема о сечении множества действительных чисел. Представимость действительного числа в виде систематической дроби.

Действительное число как бесконечная десятичная дробь. Представление действительных чисел десятичными дробями. Линейно упорядоченное множество десятичных дробей. Конечные десятичные дроби. Сложение произвольных десятичных дробей. Основные свойства сложения десятичных дробей. Умножение произвольных десятичных дробей.

Категоричность аксиоматики системы действительных чисел. Изоморфизм упорядоченных полей действительных чисел. Изоморфные отображения упорядоченного поля действительных чисел.

Аксиома Архимеда и аксиома Кантора в упорядоченных полях. Упорядоченные поля, удовлетворяющие аксиоме Архимеда.

Нормированные поля. Последовательности рациональных чисел. Определение системы действительных чисел с помощью понятия фундаментальной последовательности. Действительное число как предел последовательности рациональных чисел. Геометрическая интерпретация неотрицательных действительных чисел.

Конечные и бесконечные цепные дроби. Подходящие дроби. Каноническое представление подходящих дробей. Представление действительного числа цепной дробью. Сравнение действительного числа с его подходящими дробями. Теорема Дирихле о приближении действительного числа рациональными числами.

Квадратические
иррациональности и периодические цепные дроби. Критерии иррациональности. Иррациональность я. Теорема Лиувилля и построение трансцендентных чисел. Трансцендентность числа *e*. Разложение *e* в цепную дробь. Трансцендентность числа π.

ДЕ 10. Комплексное число

Аксиоматическая теория комплексных чисел. Поле комплексных чисел как простое алгебраическое (квадратичное) расширение поля действительных чисел. Существование и единственность поля комплексных чисел (непротиворечивость и категоричность аксиоматики поля комплексных чисел).

Основные свойства комплексных чисел. Равномощность множества комплексных чисел и множеств действительных чисел. Строение аддитивной группы поля комплексных чисел. Упорядоченность аддитивной группы комплексных чисел и невозможность упорядочивания кольца комплексных чисел. Алгебраическая замкнутость поля комплексных чисел.

ДЕ 11. Конечномерная линейная алгебра

Линейные алгебры над полем. Структурные константы линейной алгебры. Изоморфное вложение поля скаляров в центр алгебры с единицей. Выполнение деления в конечномерной алгебре без делителей нуля с единицей. Существование единицы в ассоциативной конечномерной алгебре.

Конечномерные действительные линейные алгебры. Корни многочленов с действительными коэффициентами и элементы из конечномерной действительной ассоциативной линейной алгебры без делителей нуля.

ДЕ 12. Кватернион

Система кватернионов. Структурные константы алгебры кватернионов. Норма кватерниона. Отсутствие делителей нуля в алгебре кватернионов. Категоричность аксиоматики тела кватернионов. Группа кватернионов и ее свойства.

Теорема Фробениуса. Конечномерные действительные ассоциативно-коммутативные алгебры без делителей нуля. Тело кватернионов как единственная конечномерная действительная ассоциативная, но не коммутативная алгебры без делителей нуля. Понятие об алгебре октав Кэли.

Значение развития понятия числа для математики и ее приложений. Вопросы развития понятия числа в школьном курсе математики.

Тематическое планирование

Модули дисциплины

№	Наименование модуля	Лекции	Практики/ семинары	Лабораторные	Сам. работа	Всего, часов
1	**Числовые системы**	**18**	**26**	**0**	**100**	**144**
	Всего	**18**	**26**	**0**	**100**	**144**

Тематический план
Модуль 1

№ темы	Тема	Вид занятий	Кол-во часов	Компетенции
	Лекции			
1	Аксиоматическая теория натуральных чисел	Лек	2	ОК-3; ОК-6; ПК-4.

2	Сложение и умножение натуральных чисел	Лек	2	ОК-3; ОК-6; ПК-4.
3	Аксиоматическая теория целых чисел	Лек	2	ОК-3; ОК-6; ПК-4.
4	Непротиворечивость и категоричность аксиоматической теории целых чисел	Лек	2	ОК-3; ОК-6; ПК-4.
5	Аксиоматическая теория действительных чисел	Лек	2	ОК-3; ОК-6; ПК-4.
6	Аксиоматическая теория комплексных чисел	Лек	2	ОК-3; ОК-6; ПК-4.
7	Линейные алгебры нал полями	Лек	2	ОК-3; ОК-6; ПК-4.
8	Комплексные и гиперкомплексные числа	Лек	2	ОК-3; ОК-6; ПК-4.
9	Теорема Фробениуса	Лек	2	ОК-3; ОК-6; ПК-4.
	Практические занятия (семинары)			
1	Теоретико-множественная модель системы натуральных чисел	Пр/сем	2	ОК-3; ОК-6; ПК-4.
2	Сложение и умножение натуральных чисел	Пр/сем	2	ОК-3; ОК-6; ПК-4.
3	Независимость аксиомы индукции и ее роль в арифметике	Пр/сем	2	ОК-3; ОК-6; ПК-4.
4	Аксиоматическая теория целых чисел	Пр/сем	2	ОК-3; ОК-6; ПК-4.
5	Непротиворечивость и категоричность аксиоматической теории целых чисел	Пр/сем	2	ОК-3; ОК-6; ПК-4.
6	Аксиоматическая теория действительных чисел	Пр/сем	2	ОК-3; ОК-6; ПК-4.
7	Аксиоматическая теория комплексных чисел	Пр/сем	2	ОК-3; ОК-6; ПК-4.
8	Линейные алгебры над полями	Пр/сем	2	ОК-3; ОК-6; ПК-4.
9	Кватернионы	Пр/сем	2	ОК-3; ОК-6; ПК-4.
10	Группа кватернионов	Пр/сем	2	ОК-3; ОК-6; ПК-4.
11	Комплексные числа	Пр/сем	2	ОК-3; ОК-6; ПК-4.
12	Гиперкомлексные числа	Пр/сем	2	ОК-3; ОК-6; ПК-4.
13	Теорема Фробениуса	Пр/сем	2	ОК-3; ОК-6; ПК-4.
	Самостоятельная работа			
1	Аксиоматические теории	Сам.р.	10	ОК-3; ОК-6; ПК-4.
2	Аксиоматика Пеано	Сам.р.	10	ОК-3; ОК-6; ПК-4.
3	Тождества Грассмана	Сам.р.	10	ОК-3; ОК-6; ПК-4.

4	Полукольцо натуральных чисел	Сам.р.	10	ОК-3; ОК-6; ПК-4.
5	Кольцо целых чисел	Сам.р.	10	ОК-3; ОК-6; ПК-4.
6	Поле рациональных чисел	Сам.р.	10	ОК-3; ОК-6; ПК-4.
7	Непрерывность	Сам.р.	10	ОК-3; ОК-6; ПК-4.
8	Поле действительных чисел	Сам.р.	10	ОК-3; ОК-6; ПК-4.
9	Поле комплексных чисел	Сам.р.	10	ОК-3; ОК-6; ПК-4.
10	Подготовка к контрольной работе	Сам.р.	10	ОК-3; ОК-6; ПК-4.

План практических занятий

Аудиторные занятия и задания для самостоятельной (домашней) работы по указанным разделам проводятся на основе учебных пособий:

1. Горюшкин А.П. Обзорные лекции по алгебре. – М.: МАКС Пресс, 2012.
2. Горюшкин А.П. Математика / Учебное пособие. - Петропавловск-Камчатский, изд-во КамГУ им. Витуса Беринга, 2009.

№ занятия	Тема и раздел	Номера задач для аудиторной работы	Номера задач для домашней работы
1.	Теоретико-множественная модель системы натуральных чисел	[1] Упражнения к главе 3, § 1.	[2] Упражнения к главе 2, §§ 2, 3.
2.	Сложение и умножение натуральных чисел	[1] Упражнения к главе 5, §§ 1, 2, 3.	[2] Упражнения к главе 2, §§ 4 - 8.
3.	Независимость аксиомы индукции и ее роль в арифметике	[1] Упражнения к главе 2, § 1.	[2] Упражнения к главе 2, §§ 4, 5.
4.	Аксиоматическая теория целых чисел	[1] Упражнения к главе 4, § 4.	[2] Упражнения к главе 2, §§ 2, 3.
5.	Непротиворечивость и категоричность аксиоматической теории целых чисел	[2] Упражнения к главе 5, §§ 1, 2, 3.	[2] Упражнения к главе 2, §§ 4 - 8.
6.	Аксиоматическая теория действительных чисел	[1] Упражнения к главе 2, § 1.	[2] Упражнения к главе 2, §§ 4, 5.
7.	Аксиоматическая теория комплексных чисел	[1] Упражнения к главе 3, § 1.	[2] Упражнения к главе 2, §§ 2, 3.
8.	Линейные алгебры над полями	[1]	[2]

		Упражнения к главе 6, §§ 1, 2, 3.	Упражнения к главе 2, §§ 4 - 8.
9.	Кватернионы	[1] Упражнения к главе 7, § 1.	[2] Упражнения к главе 2, §§ 4, 5.
10.	Группа кватернионов	[1] Упражнения к главе 8, § 1.	[2] Упражнения к главе 2, §§ 2, 3.
11.	Комплексные числа	[1] Упражнения к главе 9, §§ 1, 2, 3.	[2] Упражнения к главе 2, §§ 4 - 8.
12.	Гиперкомлексные числа	[1] Упражнения к главе 10, § 1.	[2] Упражнения к главе 2, §§ 4, 5.
13.	Теорема Фробениуса	[1] Упражнения к главе11, § 1.	[2] Упражнения к главе 2, §§ 2, 3.

Организация самостоятельной работы студентов

Самостоятельная работа

Тема: Аксиоматические теории

Задачи для работы в аудитории: [1] Упражнения к главе 2, §§ 1, 2, 3.
Задачи для самостоятельной работы: [1] Упражнения к главе 2, §§ 4 - 9.

Тема: Аксиоматика Пеано

Задачи для работы в аудитории: [1] Упражнения к главе 3, § 1.
Задачи для самостоятельной работы: [1] Упражнения к главе 2, §§ 2, 3.

Тема: Тождества Грассмана

Задачи для работы в аудитории: [1] Упражнения к главе 5, §§ 1, 2, 3.
Задачи для самостоятельной работы: [1] Упражнения к главе 2, §§ 4 - 8.

Тема: Полукольцо натуральных чисел

Задачи для работы в аудитории: [1] Упражнения к главе 2, § 1.
Задачи для самостоятельной работы: [1] Упражнения к главе 2, §§ 2, 3.

Тема: Непрерывность

Задачи для работы в аудитории: Упражнения к главе 2, § 3 .
Задачи для самостоятельной работы: [1] § 2.

Тема: Поле действительных чисел

Задачи для работы в аудитории: [1] Упражнения к главе 5, §§ 1, 2, 3.
Задачи для самостоятельной работы: [1] Упражнения к главе 2, §§ 4 - 8.

Тема: Поле комплексных чисел

Задачи для работы в аудитории: [1] Упражнения к главе 2, § 1.
Задачи для самостоятельной работы: [1] Упражнения к главе 2, §§ 2, 3.

Тема: Подготовка к контрольной работе

Задачи для работы в аудитории: [1] глава 2, § 1.
Задачи для самостоятельной работы: [1], глава 4 § 5. § 6 § 7.

Вопросы для самоконтроля самостоятельной работы

Сложение целых неотрицательных чисел, определенное через объединение множеств

1. Докажите, что для каждых множеств A, B существуют множество A_1, равномощное с множеством A, и множество B_1, равномощное с множеством B, такие, что $A \cap B = \varnothing$.
2. Докажите, что сумма целых неотрицательных чисел, определенная через объединение множеств, всегда существует.
3. Докажите, что сумма целых неотрицательных чисел, определенная через объединение множеств, единственна.
4. Докажите, что сложение целых неотрицательных чисел, определенное через объединение множеств, ассоциативно.
5. Докажите, что сложение целых неотрицательных чисел, определенное через объединение множеств, коммутативно.
6. Докажите, что сложение целых неотрицательных чисел, определенное через объединение множеств, обладает нейтральным элементом.
7. Докажите, что в любой числовой системе существует не более одного нейтрального элемента по сложению.

Умножение целых неотрицательных чисел, определенное через декартово произведение множеств

1. Докажите, что произведение целых неотрицательных чисел, определенное через декартово произведение множеств, всегда существует.
2. Докажите, что произведение целых неотрицательных чисел, определенное через декартово произведение множеств, единственно.
3. Докажите, что умножение целых неотрицательных чисел, определенное через декартово произведение множеств, ассоциативно.
4. Докажите, что умножение целых неотрицательных чисел, определенное через декартово произведение множеств, коммутативно.
5. Докажите, что умножение целых неотрицательных чисел, определенное через декартово произведение множеств, обладает нейтральным элементом.
6. Докажите, что в любой числовой системе существует не более одного нейтрального элемента по умножению.
7. Докажите, что умножение целых неотрицательных чисел, определенное через декартово произведение множеств, обладает аннулирующим элементом.
8. Докажите, что умножение целых неотрицательных чисел, определенное через

декартово произведение множеств, и сложение, определенное через объединение множеств связаны дистрибутивным законом.

Деление целых неотрицательных чисел, определенное через разбиение множества на смежные классы

1. Докажите, что если конечное множество A разбито на равномощные классы, то число этих классов зависит только от мощности множества A и мощности класса.
2. Докажите, что если множество A разбито на равномощные классы, то число этих классов зависит не только от мощности множества A и мощности класса.
3. Докажите, что неполное частное для целых неотрицательных чисел, определенное через разбиение множества на классы, всегда существует.
4. Докажите, что неполное частное для целых неотрицательных чисел, определенное через разбиение множества на классы, единственно.
5. Докажите, что остаток при делении, определенном через разбиение множества на классы, всегда существует.
6. Докажите, что остаток при делении, определенном через разбиение множества на классы, всегда единственен.
7. Докажите, что при частном, определенном через разбиение множества на классы, деление на нуль невозможно.
8. Докажите, что частное при делении, определенном через разбиение множества на классы, единственно, если существует.

Аксиоматическое задание системы целых неотрицательных чисел

1. Докажите, что аксиоматика Пеано непротиворечива, если непротиворечива теория множеств.
2. Докажите, что первую аксиому Пеано нельзя вывести как теорему из двух других аксиом.
3. Докажите, что вторую аксиому Пеано нельзя вывести как теорему из двух других аксиом.
4. Докажите, что аксиому индукции нельзя вывести как теорему из двух других аксиом.
5. Докажите, что сумма целых неотрицательных чисел в системе Пеано единственна, если существует.
6. Докажите, что сумма целых неотрицательных чисел в системе Пеано существует.
7. Докажите, что произведение целых неотрицательных чисел в системе Пеано единственно, если существует.
8. Докажите, что произведение целых неотрицательных чисел в системе Пеано существует.
9. Докажите, что сложение целых неотрицательных чисел в системе Пеано коммутативно.
10. Докажите, что сложение целых неотрицательных чисел в системе Пеано ассоциативно.
11. Докажите, что умножение целых неотрицательных чисел в системе Пеано коммутативно.
12. Докажите, что умножение целых неотрицательных чисел в системе Пеано ассоциативно.
13. Докажите, что сложение и умножение целых неотрицательных чисел в системе Пеано связаны дистрибутивным законом.
14. Докажите, что сложение целых неотрицательных чисел в системе Пеано обладает свойством сократимости.

15. Докажите, что умножение целых неотрицательных чисел в системе Пеано обладает свойством сократимости.
16. Докажите, что $2\times2=4$.

Вычитание и деление в системе Пеано

1. Докажите, что в системе Пеано уравнение $b+x=a$ имеет не более одного решения.
2. Докажите, что в системе Пеано уравнение $bx=a$, где $b\neq0$, имеет не более одного решения.
3. Докажите, что в любой числовой системе нейтральный элемент сложения является аннулирующим элементом умножения.
4. Докажите, что деление на нуль невозможно в любой числовой системе.
5. Докажите, что отношение делимости на множестве целых неотрицательных чисел является отношением частичного порядка.
6. Докажите, что вычитание и умножение целых неотрицательных чисел в системе Пеано связаны дистрибутивным законом.
7. Докажите, что вычитание и деление целых неотрицательных чисел в системе Пеано связаны дистрибутивным законом.
8. Докажите, что сложение и деление целых неотрицательных чисел в системе Пеано связаны дистрибутивным законом.
9. Докажите, что отношение $\leq$ («не больше») является следствием отношения делимости.

Свойства множества целых неотрицательных чисел

1. Докажите, что множество целых неотрицательных чисел в системе Пеано бесконечно.
2. Докажите, что отношение $\leq$ («не больше») на множестве целых неотрицательных чисел в системе Пеано является отношением порядка.
3. Докажите, что отношение порядка $\leq$ («не больше») на множестве целых неотрицательных чисел в системе Пеано связно.
4. Докажите, что отношение $\leq$ («не больше») на множестве целых неотрицательных чисел в системе Пеано является отношением дискретного порядка.
5. Докажите, что множество целых неотрицательных чисел в системе Пеано вполне упорядочено.
6. Докажите, что сложение целых неотрицательных чисел в системе Пеано монотонно.
7. Докажите, что умножение целых неотрицательных чисел в системе Пеано монотонно
8. Докажите, что множество целых неотрицательных чисел в системе Пеано архимедовски упорядочено.
9. Докажите, что множество чисел в системе Пеано, состоящее из всех целых неотрицательных чисел, не превосходящих данное число, конечно.

Отрезок натурального ряда

1. Докажите, что отрезок натурального ряда является конечным множеством.
2. Докажите, что отрезки натурального ряда $[1, a]$ и $[1, b]$ совпадают тогда и только тогда, когда $a=b$.
3. Докажите, что отрезки натурального ряда $[1, a]$ содержится в отрезке $[1, b]$ тогда и только тогда, когда $a \leq b$.
4. Докажите, что если $a \neq b$, то отрезки натурального ряда $[1, a]$ и $[1, b]$ - не равномощны.
5. Докажите, что если $a<b$, то в отрезке натурального ряда $[1, b]$ содержится подмножество, равномощное отрезку $[1, a]$.

6. Докажите, что каждое конечное не пустое множество равномощно некоторому отрезку натурального ряда.
7. Докажите, что каждое конечное множество можно линейно упорядочить.
8. Докажите, что существует единственный тип линейного упорядочения конечного множества.
9. Докажите, что существует не единственный тип линейного упорядочения бесконечного множества.

Свойства множества рациональных чисел

1. Докажите, что если система рациональных чисел существует, то каждое рациональное число представляется обыкновенной дробью.
2. Докажите, что отношение равенства для обыкновенных дробей является отношением эквивалентности.
3. Докажите, что каждое положительное рациональное число имеет единственное представление в виде несократимой дроби.
4. Докажите, что каждое рациональное число можно представить периодической десятичной дробью.
5. Докажите, что каждая периодическая десятичная дробь изображает некоторое рациональное число.
6. Докажите, что каждое рациональное число можно представить конечной цепной дробью.
7. Докажите, что каждая конечная цепная дробь изображает некоторое рациональное число.

Арифметические действия над рациональными числами

1. Докажите, что сумма рациональных чисел, представленных обыкновенными дробями, всегда существует и единственна.
2. Докажите, что сложение рациональных чисел, представленных обыкновенными дробями, ассоциативно.
3. Докажите, что сложение рациональных чисел, представленных обыкновенными дробями, коммутативно.
4. Докажите, что сложение на множестве рациональных чисел, представленных обыкновенными дробями, обладает нейтральным элементом.
5. Докажите, что для каждого рационального числа, представленного обыкновенной дробью, существует единственное противоположное рациональное число.
6. Докажите, что сложение на множестве рациональных чисел, представленных обыкновенными дробями, удовлетворяет закону сокращения.
7. Докажите, что разность рациональных чисел, представленных обыкновенными дробями, всегда существует и единственна.
8. Докажите, что произведение рациональных чисел, представленных обыкновенными дробями, всегда существует и единственно.
9. Докажите, что умножение рациональных чисел, представленных обыкновенными дробями, ассоциативно.
10. Докажите, что умножение рациональных чисел, представленных обыкновенными дробями, коммутативно.
11. Докажите, что умножение на множестве рациональных чисел, представленных обыкновенными дробями, обладает нейтральным элементом.
12. Докажите, что для каждого рационального ненулевого числа, представленного обыкновенной дробью, существует единственное обратное рациональное число.

13. Докажите, что умножение на множестве рациональных чисел, представленных обыкновенными дробями, удовлетворяет закону сокращения.
14. Докажите, что умножение и сложение рациональных чисел, представленных обыкновенными дробями, связаны дистрибутивным законом.
15. Докажите, что частное рациональных чисел, представленных обыкновенными дробями (с ненулевым делителем), всегда существует и единственно.
16. Докажите, что система рациональных чисел, представленных обыкновенными дробями, упорядочиваема.
17. Докажите, что порядок в системе рациональных чисел, представленных обыкновенными дробями, является линейным.
18. Докажите, что порядок в системе рациональных чисел, представленных обыкновенными дробями, является архимедовым.
19. Докажите, что порядок в системе рациональных чисел, представленных обыкновенными дробями, является плотным.
20. Докажите, что уравнение $x^2=2$ не имеет решения в системе рациональных чисел.
21. Докажите, что порядок в системе рациональных чисел не является непрерывным.
22. Докажите, что порядок в системе рациональных чисел не является вполне упорядочением.
23. Докажите, что порядок в системе рациональных чисел не является дискретным.
24. Докажите, что сложение в системе рациональных чисел является монотонной функцией.
25. Докажите, что умножение в системе положительных рациональных чисел является монотонной функций.
26. Докажите, что множество рациональных чисел счётно.
27. Докажите, что отношение соизмеримости является эквивалентностью на множестве отрезков.
28. Докажите, что сумма отрезков, соизмеримых с данным отрезком, соизмерима с этим отрезком.
29. Докажите, что разность отрезков, соизмеримых с данным отрезком, соизмерима с этим отрезком.
30. Докажите, что произведение отрезков, соизмеримых с данным отрезком, соизмеримо с этим отрезком.
31. Докажите, что частное отрезков, соизмеримых с данным отрезком, соизмеримо с этим отрезком.

Система действительных чисел

1. Докажите, что множество точек на прямой несчетно.
2. Докажите, что непрерывно упорядоченное множество несчетно.
3. Докажите, что множество действительных чисел и множество точек прямой равномощны.
4. Докажите, что сумма действительных чисел, представленных сечениями Дедекинда, всегда существует и единственна.
5. Докажите, что каждое иррациональное число, представленное сечением Дедекинда, с любой точностью может быть представлено рациональными числами по недостатку и по избытку.
6. Докажите, что сложение действительных чисел, представленных сечениями Дедекинда, ассоциативно.

7. Докажите, что сложение действительных чисел, представленных сечениями Дедекинда, коммутативно.
8. Докажите, что сложение на множестве действительных чисел, представленных сечениями Дедекинда, обладает нейтральным элементом.
9. Докажите, что для каждого действительного числа, представленного сечением Дедекинда, существует единственное противоположное.
10. Докажите, что сложение на множестве действительных чисел, представленных сечениями Дедекинда, удовлетворяет закону сокращения.
11. Докажите, что произведение действительных чисел, представленных сечениями Дедекинда, всегда существует и единственно.
12. Докажите, что умножение действительных чисел, представленных сечениями Дедекинда, ассоциативно.
13. Докажите, что умножение действительных чисел, представленных сечениями Дедекинда, коммутативно.
14. Докажите, что умножение на множестве действительных чисел, представленных сечениями Дедекинда, обладает нейтральным элементом.
15. Докажите, что для каждого действительного ненулевого числа, представленного сечением Дедекинда, существует единственное обратное.
16. Докажите, что умножение на множестве действительных чисел, представленных сечениями Дедекинда, удовлетворяет закону сокращения.
17. Докажите, что умножение и сложение действительных чисел, представленных сечениями Дедекинда, связаны дистрибутивным законом.
18. Докажите, что система действительных чисел, представленных сечениями Дедекинда, упорядочиваема.
19. Докажите, что порядок в системе действительных чисел является линейным.
20. Докажите, что порядок в системе действительных, представленных сечениями Дедекинда, чисел является архимедовым.
21. Докажите, что порядок в системе действительных чисел, представленных сечениями Дедекинда, является плотным.
22. Докажите, что порядок в системе действительных, представленных сечениями Дедекинда, чисел является непрерывным.
23. Докажите, что каждое действительное число можно представить в виде цепной дроби.
24. Докажите, что каждое иррациональное число можно представить в виде бесконечной цепной дроби.
25. Найдите представление в виде цепной дроби золотого сечения.
26. Найдите представление в виде цепной дроби числа $\sqrt{2}$.

27. Найдите представление в виде цепной дроби числа $\sqrt{5}$.
28. Докажите, что число $\sqrt{5}$ иррационально.
29. Докажите, что число $\sqrt{2}$ иррационально.
30. Докажите, что число, выражающее золотое сечение иррационально.
31. Докажите, что множество иррациональных чисел несчетно.
32. Докажите, что сумма рационального и иррационального чисел иррационально.
33. Докажите, что произведение рационального и иррационального чисел иррационально.
34. Докажите, что разность рационального и иррационального чисел иррациональна.
35. Докажите, что частное рационального и иррационального чисел иррационально.
36. Покажите, что сумма, разность, произведение и частное двух иррациональных чисел может быть рациональным.
37. Докажите, что сумма действительных чисел, представленных бесконечными десятичными дробями, всегда существует и единственна.
38. Докажите, что каждое иррациональное число, представленное бесконечными десятичными дробями, с любой точностью может быть представлено рациональными числами по недостатку и по избытку.
39. Докажите, что сложение действительных чисел, представленных бесконечными десятичными дробями, ассоциативно.
40. Докажите, что сложение действительных чисел, представленных бесконечными десятичными дробями, коммутативно.
41. Докажите, что сложение на множестве действительных чисел, представленных бесконечными десятичными дробями, обладает нейтральным элементом.
42. Докажите, что для каждого действительного числа, представленного бесконечной десятичной дробью, существует единственное противоположное.
43. Докажите, что каждая непериодическая десятичная дробь изображает иррациональное число.
44. Докажите, что сложение на множестве действительных чисел, представленных бесконечными десятичными дробями, удовлетворяет закону сокращения.
45. Докажите, что произведение действительных чисел, представленных бесконечными десятичными дробями, всегда существует и единственно.

46. Докажите, что умножение действительных чисел, представленных бесконечными десятичными дробями, ассоциативно.
47. Докажите, что умножение действительных чисел, представленных бесконечными десятичными дробями, коммутативно.
48. Докажите, что умножение на множестве действительных чисел, представленных бесконечными десятичными дробями, обладает нейтральным элементом.
49. Докажите, что для каждого действительного ненулевого числа, представленного бесконечными десятичными дробями, существует единственное обратное.
50. Докажите, что умножение на множестве действительных чисел, представленных бесконечными десятичными дробями, удовлетворяет закону сокращения.
51. Докажите, что умножение и сложение действительных чисел, представленных бесконечными десятичными дробями, связаны дистрибутивным законом.
52. Докажите, что система действительных чисел, представленных бесконечными десятичными дробями, упорядочиваема.
53. Докажите, что порядок в системе действительных чисел является линейным.
54. Докажите, что порядок в системе действительных, представленных сечениями Дедекинда, чисел является архимедовым.
55. Докажите, что порядок в системе действительных чисел, представленных сечениями Дедекинда, является плотным.
56. Докажите, что порядок в системе действительных, представленных сечениями Дедекинда, чисел является непрерывным.
57. Докажите, что порядок в системе действительных чисел не является вполне упорядочением.
58. Покажите, что порядок в системе действительных чисел не является дискретным.
59. Докажите, что сложение в системе действительных чисел является монотонной функцией.
60. Докажите, что умножение в системе положительных действительных чисел является монотонной функций.
61. Покажите , что умножение положительных действительных чисел в геометрической интерпретации ассоциативно.
62. Покажите , что умножение положительных действительных чисел в геометрической интерпретации коммутативно.
63. Покажите , что умножение положительных действительных чисел в геометрической интерпретации обладает нейтральным элементом.

64. Покажите, что умножение положительных действительных чисел в геометрической интерпретации дистрибутивно относительно сложения.

Расширение понятие числа

1. Докажите, что каждое комплексное число является корнем многочлена с действительными коэффициентами степени не выше второй.
2. Докажите, что множества действительных и комплексных чисел равномощны.
3. Докажите, что множество действительных чисел и множество кватернионов равномощны.
4. Докажите, что алгебраическая форма комплексного числа единственна.
5. Докажите, что каждый кватернион является корнем многочлена с действительными коэффициентами степени не выше второй.
6. Докажите, что трехмерных чисел не существует.
7. Покажите, что для решения кубического уравнения с действительными коэффициентами в множестве действительных чисел необходимы комплексные числа.
8. Найдите алгебраическую форму для числа, обратного данному ненулевому комплексному числу.
9. Найдите кватернион, обратный для данного ненулевого кватерниона.
10. Докажите, что модуль произведения комплексных чисел равен произведению модулей.
11. Докажите, что произведение двух целых чисел, представимых в виде суммы двух квадратов, само является суммой двух квадратов.

Рабочие тесты по дисциплине и вопросы контрольно-срезовых работ

Часть 1

Вариант 1

Докажите, что аксиоматика Пеано независима.
Докажите, что умножение целых неотрицательных чисел, определенное через декартово произведение множеств, ассоциативно.
Докажите, что полукольцо натуральных чисел изоморфно вложимо в поле.

Вариант 2

Докажите, что аксиоматическая теория целых чисел непротиворечива, если непротиворечива аксиоматическая теория натуральных чисел.
Докажите, что умножение целых неотрицательных чисел, определенное через декартово произведение множеств, коммутативно.
Докажите, что содержательная арифметика категорична.

Вариант 3

Докажите, что умножение целых неотрицательных чисел, определенное через декартово произведение множеств, обладает нейтральным элементом.
Докажите, что каждая коммутативная полугруппа с сокращением вложима в группу.
Докажите, что умножение целых неотрицательных чисел в системе Пеано единственно.

Вариант 4

Докажите, что аксиоматическая теория целых чисел категорична, если категорична аксиоматическая теория натуральных чисел.
Докажите, что умножение целых неотрицательных чисел, определенное через декартово произведение множеств, обладает аннулирующим элементом.
Докажите, что произведение целых неотрицательных чисел в системе Пеано существует и единственно.

Вариант 5

Докажите, что аксиоматическая теория рациональных чисел категорична, если категорична аксиоматическая теория натуральных чисел.
Докажите, что умножение целых неотрицательных чисел, определенное через декартово произведение множеств, и сложение, определенное через объединение множеств связаны дистрибутивным законом.
Докажите, что сложение целых неотрицательных чисел в системе Пеано коммутативно.

Вариант 6

Докажите, что аксиоматическая теория целых чисел категорична, если категорична аксиоматическая теория целых неотрицательных чисел.

Докажите, что множество иррациональных чисел несчётно.
Докажите, что сумма целых неотрицательных чисел в системе Пеано существует и единственна.

Вариант 7

Докажите, что остаток при делении, определенном через разбиение множества на классы, всегда существует и единственен.
Найдите полугруппу эндоморфизмов и группу автоморфизмов аддитивной группы целых чисел и кольца целых чисел.
Докажите, что условие индуктивности и условие обрыва убывающих цепей равносильны.

Вариант 8

Докажите, что в системе Пеано уравнение b+x=a имеет не более одного решения.
Докажите, что условие обрыва убывающих цепей и условие минимальности равносильны.
Докажите, что умножение целых неотрицательных чисел в системе Пеано коммутативно.

Вариант 9

Докажите, что кольцо целых чисел упорядочиваемо.
Докажите, что поле рациональных чисел линейно упорядочиваемо.
Докажите, что умножение целых неотрицательных чисел в системе Пеано ассоциативно.

Вариант 10

Докажите, что отрезок натурального ряда является конечным множеством.
Докажите, что порядок поля рациональных чисел является плотным и архимедовым.
Докажите, что сумма целых неотрицательных чисел в системе Пеано существует и единственна.

Вариант 11

Докажите, что множество рациональных чисел счётно.
Докажите, что сложение и умножение целых неотрицательных чисел в системе Пеано связаны дистрибутивным законом.
Докажите, что каждое конечное непустое множество равномощно некоторому отрезку натурального ряда.

Вариант 12

Докажите, что непрерывно упорядоченное множество несчетно.
Докажите, что сложение целых неотрицательных чисел в системе Пеано обладает свойством сократимости.
Докажите, что каждое тело характеристики нуль содержит в точности одно подкольцо, изоморфное кольцу рациональных чисел

Докажите, что множество действительных чисел и множество точек прямой равномощны.
Докажите, что вычитание в системе Пеано является частичной операцией.
Докажите, что каждое полукольцо изоморфно вложимо в кольцо.

Вариант 13

Докажите, что мультипликативная группа рациональных ненулевых чисел содержит континуум различных подгрупп.
Докажите, что умножение целых неотрицательных чисел в системе Пеано обладает свойством сократимости.
Докажите, что сложение целых неотрицательных чисел, определенное через объединение множеств, обладает нейтральным элементом.

Вариант 14

Докажите, что произведение целых неотрицательных чисел, определенное через декартово произведение множеств, всегда существует и единственно.
Докажите, что множество чисел в системе Пеано, состоящее из всех целых неотрицательных чисел, не превосходящих данное число, конечно.
Докажите, что каждое тело характеристики нуль содержит в точности одно подкольцо, изоморфное кольцу целых чисел.

Вариант 15

Докажите, что отношение $\leq$ на множестве целых неотрицательных чисел в системе Пеано является отношением линейного дискретного порядка.
Докажите, что поле рациональных чисел существует, если существует кольцо целых чисел.
Докажите, что каждая аксиоматическая теория, содержащая арифметику, неполна.

Вариант 16

Докажите, что множество целых неотрицательных чисел в системе Пеано вполне упорядочено.
Найдите полугруппу эндоморфизмов и группу автоморфизмов аддитивной группы рациональных чисел.
Докажите, что деление в системе Пеано является частичной операцией.

Вариант 17

Докажите, что сумма целых неотрицательных чисел, определенная через объединение множеств, всегда существует и единственна.
Докажите, что множество целых неотрицательных чисел в системе Пеано архимедовски упорядочено.
Докажите, что множество действительных чисел и множество натуральных чисел неравномощны.

Вариант 18

Докажите, что сложение целых неотрицательных чисел, определенное через объединение множеств, ассоциативно.
Найдите полугруппу эндоморфизмов и группу автоморфизмов поля рациональных чисел.
Докажите, что сложение целых неотрицательных чисел в системе Пеано монотонно.

Вариант 19

Докажите, что сложение целых неотрицательных чисел, определенное через объединение множеств, коммутативно.
Докажите, что поле рациональных чисел не содержит ни одного собственного подполя, но содержит континуум различных подколец.
Докажите, что сумма целых неотрицательных чисел в системе Пеано существует и единственна.

Вариант 20

Докажите, что условие индуктивности и условие минимальности равносильны.
Найдите полугруппу эндоморфизмов и группу автоморфизмов аддитивной полугруппы натуральных чисел и полукольца натуральных чисел.
Докажите, что сложение целых неотрицательных чисел в системе Пеано ассоциативно.

Часть 2

Вариант 1

01. Докажите, что аксиоматика Пеано независима.
02. Докажите, что умножение целых неотрицательных чисел, определенное через декартово произведение множеств, ассоциативно.
03. Докажите, что полукольцо натуральных чисел изоморфно вложимо в поле.
04. Докажите, что аксиоматическая теория действительных чисел непротиворечива, если непротиворечива аксиоматическая теория натуральных чисел.
05. Докажите, что умножение на множестве действительных чисел, представленных сечениями Дедекинда, обладает нейтральным элементом.

Вариант 2

01. Докажите, что аксиоматическая теория целых чисел непротиворечива, если непротиворечива аксиоматическая теория натуральных чисел.
02. Докажите, что умножение целых неотрицательных чисел, определенное через декартово произведение множеств, коммутативно.
03. Найдите группу автоморфизмов поля действительных чисел.
04. Докажите, что в модели Дедекинда для системы действительных чисел любое иррациональное число с любой точностью можно представить рациональными числами.
05. Докажите, что порядок в системе действительных чисел является линейным.

Вариант 3

02. Докажите, что умножение целых неотрицательных чисел, определенное через декартово произведение множеств, обладает нейтральным элементом.
03. Докажите, что каждая коммутативная полугруппа с сокращением вложима в группу.
05. Докажите, что линейная алгебра с единицей содержит подполе, изоморфное полю скаляров.
01. Докажите, что порядок в системе действительных, представленных сечениями Дедекинда, чисел является архимедовым.
04. Докажите, что поле действительных чисел содержит бесконечное множество неизоморфных подполей.

Вариант 4

01. Докажите, что аксиоматическая теория целых чисел категорична, если категорична аксиоматическая теория натуральных чисел.
02. Докажите, что умножение целых неотрицательных чисел, определенное через декартово произведение множеств, обладает аннулирующим элементом.
03. Докажите, что произведение целых неотрицательных чисел в системе Пеано существует и единственно.
04. Докажите, что порядок в системе действительных чисел, представленных сечениями Дедекинда, является плотным.
05. Докажите, что каждое кольцо вложимо в неизоморфное ему кольцо.

Вариант 5

01. Докажите, что аксиоматическая теория рациональных чисел категорична, если категорична аксиоматическая теория натуральных чисел.
02. Докажите, что умножение целых неотрицательных чисел, определенное через декартово произведение множеств, и сложение, определенное через объединение множеств связаны дистрибутивным законом.
03. Докажите, что сложение целых неотрицательных чисел в системе Пеано коммутативно.
04. Покажите, что умножение положительных действительных чисел в геометрической интерпретации ассоциативно.
05. Докажите, что каждое поле вложимо в неизоморфное ему поле.

Вариант 6

01. Докажите, что аксиоматическая теория целых чисел категорична, если категорична аксиоматическая теория натуральных чисел.
02. Докажите, что сумма целых неотрицательных чисел в системе Пеано существует и единственна.
03. Докажите, что если конечное множество A разбито на равномощные классы, то число этих классов зависит только от мощности множества A и мощности класса.
04. Докажите, что аксиоматическая теория действительных чисел категорична, если категорична аксиоматическая теория натуральных чисел.
05. Докажите, что действительных ассоциативных без делителей нуля линейных алгебр размерности три не существует.

Вариант 7

01. Докажите, что неполное частное для целых неотрицательных чисел, определенное через разбиение множества на классы, всегда существует и единственно.
02. Найдите полугруппу эндоморфизмов и группу автоморфизмов аддитивной полугруппы натуральных чисел и полукольца натуральных чисел.
03. Докажите, что сложение целых неотрицательных чисел в системе Пеано ассоциативно.
04. Покажите, что умножение положительных действительных чисел в геометрической интерпретации дистрибутивно относительно сложения.
05. Докажите, что конечномерная ассоциативная линейная алгебра без делителей нуля является алгеброй с делением.

Вариант 8

01. Докажите, что остаток при делении, определенном через разбиение множества на классы, всегда существует и единственен.
02. Найдите полугруппу эндоморфизмов и группу автоморфизмов аддитивной группы целых чисел и кольца целых чисел.
03. Докажите, что сумма целых неотрицательных чисел в системе Пеано существует и единственна.
04. Докажите, что если линейная алгебра над полем P содержит единицу, то поле P изоморфно вложимо в центр этой алгебры.
05. Докажите, что каждый элемент конечномерной действительной алгебры является корнем многочлена с действительными коэффициентами степени не выше второй.

Вариант 9

01. Докажите, что умножение целых неотрицательных чисел в системе Пеано коммутативно.
02. Докажите, что аксиоматическая теория рациональных чисел непротиворечива, если непротиворечива аксиоматическая теория натуральных чисел.
03. Докажите, что в системе Пеано уравнение $b+x=a$ имеет не более одного решения.
04. Докажите, что множества действительных и комплексных чисел равномощны.
05. Докажите, что конечномерная ассоциативная линейная алгебра без делителей нуля является алгебраическим расширением своего поля скаляров.

Вариант 10

01. Докажите, что аксиоматическая теория рациональных чисел категорична, если категорична аксиоматическая теория натуральных чисел.
02. Докажите, что сумма целых неотрицательных чисел в системе Пеано существует и единственна.
03. Докажите, что в системе Пеано уравнение $bx=a$, где $b\neq 0$, имеет не более одного решения.
04. Докажите, что множество действительных чисел и множество кватернионов равномощны.
05. Докажите, что каждый элемент конечномерной действительной ассоциативной без делителей нуля линейной алгебры является корнем многочлена с действительными коэффициентами степени не выше второй.

Вариант 11

01. Покажите, что умножение положительных действительных чисел в геометрической интерпретации обладает нейтральным элементом.
02. Докажите, что поле рациональных чисел линейно упорядочиваемо.
03. Докажите, что умножение целых неотрицательных чисел в системе Пеано ассоциативно.
04. Докажите, что алгебра кватернионов является телом.
05. Докажите, что каждый кватернион является корнем многочлена с действительными коэффициентами степени не выше второй.

Вариант 12

01. Докажите, что отрезок натурального ряда является конечным множеством.
02. Докажите, что порядок поля рациональных чисел является плотным и архимедовым.
03. Докажите, что сумма целых неотрицательных чисел в системе Пеано существует и единственна.
04. Докажите, что множество иррациональных чисел несчётно.
05. Докажите, что одно-порожденная действительная конечномерная ассоциативная без делителей нуля алгебра изоморфна полю действительных чисел или полю комплексных чисел

Вариант 13

01. Докажите, что аддитивная группа целых чисел неразложима в прямую сумму своих подгрупп.
02. Докажите, что множество рациональных чисел счётно.
03. Докажите, что сложение и умножение целых неотрицательных чисел в системе Пеано связаны дистрибутивным законом.
04. Покажите, что группа автоморфизмов поля комплексных чисел нетривиальна.
05. Докажите, что размерность конечномерной действительной ассоциативной без делителей нуля линейной алгебры может принимать лишь значения 1, 2, 4.

Вариант 14

01. Докажите, что не существует гомоморфизма аддитивной группы рациональных чисел на мультипликативную группу положительных рациональных чисел.
02. Докажите, что сложение целых неотрицательных чисел в системе Пеано обладает свойством сократимости.
03. Докажите, что каждое тело характеристики нуль содержит в точности одно подкольцо, изоморфное кольцу рациональных чисел
04. Докажите, что каждое непрерывно упорядоченное множество несчетно.
05. Докажите, что если два-порожденная действительная конечномерная ассоциативная без делителей нуля алгебра не изоморфна ни полю действительных чисел, ни полю комплексных чисел, то она изоморфна телу кватернионов.

Вариант 15

01. Докажите, что множество действительных чисел и множество точек прямой равномощны.
02. Докажите, что сумма целых неотрицательных чисел в системе Пеано существует и единственна.
03. Докажите, что каждое полукольцо вложимо в кольцо.
04. Докажите, что аддитивная группа действительных чисел изоморфна мультипликативной группе положительных действительных чисел.
05. Докажите, что действительных ассоциативных без делителей нуля линейных алгебр размерности три не существует.

Вариант 16

01. Докажите, что мультипликативная группа рациональных ненулевых чисел содержит континуум различных подгрупп.
02. Докажите, что умножение целых неотрицательных чисел в системе Пеано обладает свойством сократимости.
03. Докажите, что умножение рациональных чисел, представленных обыкновенными дробями, дистрибутивно относительно сложения.
04. Докажите, что сумма действительных чисел, представленных сечениями Дедекинда, всегда существует и единственна.
05. Докажите, что действительных ассоциативных без делителей нуля линейных алгебр размерности больше четырех не существует.

Вариант 17

01. Докажите, что каждая конечная абелева группа является гомоморфным образом мультипликативной группы рациональных ненулевых чисел.
02. Докажите, что сумма целых неотрицательных чисел в системе Пеано существует и единственна.
03. Докажите, что произведение целых неотрицательных чисел, определенное через декартово произведение множеств, всегда существует и единственно.
04. Докажите, что каждое иррациональное число, представленное сечением Дедекинда, с любой точностью может быть представлено рациональными числами по недостатку и по избытку.
05. Докажите, что единственной конечномерной ассоциативной без делителей нуля линейной алгеброй над полем комплексных чисел является само поле комплексных чисел.

Вариант 18

01. Докажите, что множество целых неотрицательных чисел в системе Пеано архимедовски упорядочено.
02. Докажите, что сумма целых неотрицательных чисел, определенная через объединение множеств, всегда существует и единственна.
03. Докажите, что поле рациональных чисел существует, если существует кольцо целых чисел.
04. Докажите, что сложение действительных чисел, представленных сечениями Дедекинда, ассоциативно.
05. Докажите, что аксиоматическая теория комплексных чисел непротиворечива, если непротиворечива аксиоматическая теория натуральных чисел.

Вариант 19

01. Докажите, что множество целых неотрицательных чисел в системе Пеано вполне упорядочено.
02. Найдите полугруппу эндоморфизмов и группу автоморфизмов аддитивной группы рациональных чисел.
03. Докажите, что каждое тело характеристики нуль содержит в точности одно подкольцо, изоморфное кольцу целых чисел.
04. Докажите, что сложение действительных чисел, представленных сечениями Дедекинда, коммутативно.
05. Докажите, что аксиоматическая теория гиперкомплексных чисел непротиворечива, если непротиворечива аксиоматическая теория натуральных чисел.

Вариант 20

01. Докажите, что каждая полугруппа с делением является группой.
02. Докажите, что сложение целых неотрицательных чисел в системе Пеано монотонно.
03. Докажите, что сложение целых неотрицательных чисел, определенное через объединение множеств, ассоциативно.
04. Найдите группу автоморфизмов поля действительных чисел.
05. Докажите, что поле комплексных чисел неупорядочиваемо.

Вариант 21

02. Докажите, что сложение целых неотрицательных чисел, определенное через объединение множеств, коммутативно.
03. Докажите, что поле рациональных чисел не содержит ни одного собственного подполя, но содержит континуум различных подколец.
04. Докажите, что умножение целых неотрицательных чисел в системе Пеано монотонно.
01. Докажите, что сложение на множестве действительных чисел, представленных сечениями Дедекинда, удовлетворяет закону сокращения.
05. Докажите, что аддитивная группа поля действительных чисел изоморфна мультипликативной группе его конуса положительности.

Вариант 22

01. Докажите, что аксиоматическая теория, содержащая арифметику, неполна.
02. Докажите, что сложение целых неотрицательных чисел, определенное через объединение множеств, обладает нейтральным элементом.
03. Докажите, что поле рациональных чисел не имеет автоморфизмов, отличных от тождественного автоморфизма.
04. Докажите, что множество комплексных чисел равномощно множеству действительных чисел, содержащихся в отрезке [0, 1].
02. Докажите, что произведение действительных чисел, представленных сечениями Дедекинда, всегда существует и единственно.

тесты

Модуль 1

ДЕ 1. Алгебра

1. Алгебра <**Z**; +, · > является

полугруппой
решеткой
кольцом П
полем
группой

2. Алгебра <**Q**; +, · > является

полугруппой
решеткой
полем П
группой

3. Алгебра <**N**; + > является

полугруппой П
решеткой
кольцом
моноидом
группой

4. Алгебра <**Q**; · > является

полугруппой П
решеткой
кольцом
полем
группой

5. Алгебра <**Q**; + > является

решеткой
кольцом
полем
группой П

6. Алгебра <**R**; +, · > является

полугруппой
решеткой
полем П
группой

7. Алгебра <**C**; +, · > является

полугруппой
решеткой
полем П
группой

8. Алгебра <$\mathbf{Z}_0$; + > является

решеткой
кольцом
полем
группой
моноидом П

9. Алгебра <$\mathbf{Z}_0$; НОД, НОК > является

полугруппой
решеткой П
кольцом
полем
группой

10. Алгебра <$\mathbf{Q}_+$; · > является

полукольцом
решеткой
кольцом
полем
группой П

ДЕ 2. Бинарное отношение

1. Если для каждого *x* *xRx*, то отношение *R*

симметрично
рефлексивно П
транзитивно
антисимметрично
связно

2. Если для каждых *x*, *y* из *xRy* следует *yRx*, то отношение *R*

рефлексивно
транзитивно
симметрично П
антисимметрично
связно

3. Если для каждых x, y, z из xRy, yRz следует xRz, то отношение R

симметрично
рефлексивно
транзитивно П
антисимметрично
связно

4. Если для каждых x, y xRy или yRx, то отношение R

симметрично
рефлексивно
транзитивно
антисимметрично
связно П

5. Если для каждых x, y из xRy, yRx следует $x=y$, то отношение R

симметрично
рефлексивно
транзитивно
антисимметрично П
связно

6. Симметричное и рефлексивное отношение называется

эквивалентностью
частичным порядком
предпорядком
толерантностью П
линейным порядком

7. Симметричное, рефлексивное и транзитивное отношение называется

эквивалентностью П
частичным порядком
толерантностью
предпорядком
линейным порядком

8. Рефлексивное и транзитивное отношение называется

эквивалентностью
частичным порядком
толерантностью
линейным порядком
предпорядком П

9. Антисимметричное, рефлексивное и транзитивное отношение называется

эквивалентностью
частичным порядком П
толерантностью
предпорядком
линейным порядком

10. Антисимметричное, рефлексивное, транзитивное и связное отношение называется

эквивалентностью
частичным порядком
толерантностью
предпорядком
линейным порядком П

ДЕ 3. Теоретико-множественная модель Z_0

1. Сумму целых неотрицательных чисел, заданных как мощности конечных множеств, определяют через

пересечение
объединение П
дополнение
декартово произведение
разбиение множества на классы

2. Произведение целых неотрицательных чисел, заданных как мощности конечных множеств, определяют через

пересечение
объединение
дополнение
декартово произведение П
разбиение множества на классы

3. Разность целых неотрицательных чисел, заданных как мощности конечных множеств, определяют через

пересечение
объединение

дополнение П
декартово произведение
разбиение множества на классы

4. Частное целых неотрицательных чисел, заданных как мощности конечных множеств, определяют через

пересечение
объединение
дополнение
декартово произведение
разбиение множества на классы П

5. Сложение целых неотрицательных чисел

ассоциативно П
коммутативно П
не ассоциативно
не коммутативно
дистрибутивно относительно умножения

6. Умножение целых неотрицательных чисел

ассоциативно П
коммутативно П
не ассоциативно
не коммутативно
дистрибутивно относительно сложения П

7. Сложение целых неотрицательных чисел

не обладает нейтральным элементом
не обладает поглощающим элементом
обладает нейтральным элементом П
обладает поглощающим элементом

8. Умножение целых неотрицательных чисел

не обладает нейтральным элементом
не обладает поглощающим элементом
обладает нейтральным элементом П
обладает поглощающим элементом П

9. Вычитание целых неотрицательных чисел

ассоциативно
коммутативно

не ассоциативно П
не коммутативно П

10. Деление целых неотрицательных чисел

ассоциативно
коммутативно
не ассоциативно П
не коммутативно П

ДЕ 4. Тождество

1. Тождество $x+y = y+x$ называется законом

коммутативности П
ассоциативности
идемпотентности
поглощения
дистрибутивности
2. Тождество $x \cdot y = y \cdot x$ называется законом
коммутативности П
ассоциативности
идемпотентности
поглощения
дистрибутивности
3. Тождество $x \cdot (y + z) = y \cdot x + x \cdot z$ называется законом
коммутативности
ассоциативности
идемпотентности
поглощения
де Моргана
дистрибутивности П

4. Тождество $x \cdot 1 = x$ называется законом существования

нейтрального элемента П
обратного элемента
поглощающего элемента
противоположного элемента

5. Тождество $x + (y + z) = (y + x) + z$ называется законом

коммутативности
ассоциативности П
идемпотентности
поглощения
дистрибутивности
6. Тождество $x \cdot (y \cdot z) = (y \cdot x) \cdot z$ называется законом

коммутативности
ассоциативности П
идемпотентности
поглощения
дистрибутивности

7. Тождество $x \cdot 0 = 0$ называется законом существования

нейтрального элемента
обратного элемента
поглощающего элемента П
противоположного элемента

8. Тождество $x + 0 = x$ называется законом существования

нейтрального элемента П
обратного элемента
поглощающего элемента
противоположного элемента

9. Условное тождество $x + y = x + z \Rightarrow y = z$ называется законом
коммутативности
ассоциативности
идемпотентности
сокращения П
дистрибутивности

10. Условное тождество $x \neq 0,\ x \cdot y = x \cdot z \Rightarrow y = z$ называется законом
коммутативности
ассоциативности
идемпотентности
сокращения П
дистрибутивности

ДЕ 5. Аксиоматическая теория

1. Если аксиоматическая теория имеет модель, то

теория противоречива
теория непротиворечива П
в ней можно доказать любое предложение и его отрицание
в ней нельзя доказать предложение и его отрицание П

2. Если в аксиоматической теории нельзя доказать некоторое предложение или его отрицание, то теория

полна
неполна П

непротиворечива П
не имеет модели

3. Если в непротиворечивой аксиоматической теории можно доказать любое предложение или его отрицание, то теория

полна П
неполна
имеет модель П
не имеет модели

4. Если аксиоматическая теория имеет две неизоморфных модели, то она

непротиворечива П
противоречива
некатегорична П
категорична

5. Если аксиоматическая теория имеет только одну модель, то она

непротиворечива П
противоречива
некатегорична
категорична П

6. Если к непротиворечивой аксиоматической теории можно добавить невыводимое предложение, то теория

неполна в смысле Поста П
полна в широком смысле
полна в смысле Поста
не полна в широком смысле

7. Если к непротиворечивой аксиоматической теории нельзя добавить ни одного невыводимого предложения, то теория

полна в смысле Поста П
имеет модель П
некатегорична
категорична

8. Если одна из аксиом теории выводится из остальных, то аксиоматика

независима
зависима П
полна

неполна

9. Если ни одна из аксиом теории не выводится из остальных, то аксиоматика

независима П
зависима
полна
неполна

10. Если существует алгоритм для узнавания, является предложение теоремой теории или нет, то теория

противоречива
разрешима П
неразрешима

ДЕ 6. Мощность

1. Множество бесконечно, если оно равномощно
своему собственному подмножеству П
отрезку натурального ряда
своему любому подмножеству
бесконечному множеству П
конечному множеству
2. Отрезок натурального ряда является
конечным множеством П
бесконечным множеством
счетным множеством
несчетным множеством

3. Отрезки натурального ряда $[1, a]$ и $[1, b]$ совпадают тогда и только тогда, когда

$a=b$ П
$a\neq b$
$a>b$
$a<b$

4. Отрезок натурального ряда $[1, a]$ содержится в отрезке $[1, b]$ тогда и только тогда, когда

$a \leq b$ П
$a=b$
$a\neq b$
$a>b$

5. Если $a \neq b$, то отрезки натурального ряда $[1, a]$ и $[1, b]$ –

не равномощны П

равномощны
счетны
несчетны

6. Если $a<b$, то в отрезке натурального ряда $[1, b]$

содержится подмножество, равномощное отрезку $[1, a]$ П
не содержится подмножество, равномощное отрезку $[1, a]$

7. Каждое конечное непустое множество и некоторый отрезок натурального ряда.

равномощны П
не равномощны
счетны
несчетны

8. Каждое конечное множество

можно линейно упорядочить П
нельзя линейно упорядочить

9. Каждое конечное множество из n элементов можно линейно упорядочить

по единственному типу П
n^n способами
$n!$ способами П
бесконечным числом способов

10. Бесконечное множество можно линейно упорядочить

по единственному типу
n^n способами
$n!$ способами
бесконечным числом типов П

ДЕ 7. Операция

1. Тождество $x+y = y+x$ называется законом

коммутативности П
ассоциативности
идемпотентности
поглощения
дистрибутивности
2. Тождество $x \cdot y = y \cdot x$ называется законом
коммутативности П
ассоциативности

идемпотентности
поглощения
дистрибутивности
3. Тождество $x \cdot (y + z) = y \cdot x + x \cdot z$ называется законом
коммутативности
ассоциативности
идемпотентности
поглощения
де Моргана
дистрибутивности П

4. Тождество $x \cdot 1 = x$ называется законом существования

нейтрального элемента П
обратного элемента
поглощающего элемента
противоположного элемента

5. Тождество $x + (y + z) = (y + x) + z$ называется законом

коммутативности
ассоциативности П
идемпотентности
поглощения
дистрибутивности
6. Тождество $x \cdot (y \cdot z) = (y \cdot x) \cdot z$ называется законом
коммутативности
ассоциативности П
идемпотентности
поглощения
дистрибутивности

7. Тождество $x \cdot 0 = 0$ называется законом существования

нейтрального элемента
обратного элемента
поглощающего элемента П
противоположного элемента

8. Тождество $x + 0 = x$ называется законом существования

нейтрального элемента П
обратного элемента
поглощающего элемента
противоположного элемента

9. Условное тождество $x + y = x + z \Rightarrow y = z$ называется законом
коммутативности
ассоциативности

идемпотентности
сокращения П
дистрибутивности

10. Условное тождество $x \neq 0,\ x \cdot y = x \cdot z \Rightarrow y = z$ называется законом
коммутативности
ассоциативности
идемпотентности
сокращения П
дистрибутивности

ДЕ 8. Свойства аксиоматической теории

1. Если аксиоматическая теория имеет модель, то она

противоречива
непротиворечива П
в ней можно доказать любое предложение и его отрицание
в ней нельзя доказать предложение и его отрицание П

2. Если в аксиоматической теории нельзя доказать некоторое предложение или его отрицание, то теория

полна
неполна П
непротиворечива П
она не имеет модели

3. Если в непротиворечивой аксиоматической теории можно доказать любое предложение или его отрицание, то теория

полна П
неполна
имеет модель П
она не имеет модели

4. Если аксиоматическая теория имеет две неизоморфных модели, то она

непротиворечива П
противоречива
некатегорична П
категорична

5. Если аксиоматическая теория имеет только одну модель, то она

непротиворечива П
противоречива
некатегорична

категорична П

6. Если к непротиворечивой аксиоматической теории можно добавить невыводимое предложение, то теория

неполна в смысле Поста П
полна в широком смысле
полна в смысле Поста
не полна в широком смысле

7. Если к непротиворечивой аксиоматической теории нельзя добавить ни одного невыводимого предложения, то теория

полна в смысле Поста П
имеет модель П
некатегорична
категорична

8. Если одна из аксиом теории выводится из остальных, то аксиоматика

независима
зависима П
полна
неполна

9. Если ни одна из аксиом теории не выводится из остальных, то аксиоматика

независима П
зависима
полна
неполна

10. Если существует алгоритм для узнавания, является предложение теоремой теории или нет, то теория

противоречива
разрешима П
неразрешима
непротиворечива П

ДЕ 9. Обыкновенная дробь

1. Обыкновенной дробью можно представить
каждое рациональное число П
каждое действительное число
только целое число
только натуральное число

2. Отношение равенства для обыкновенных дробей является отношением

эквивалентности П
частичного порядка
линейного порядка
функциональным

3. Представление в виде периодической десятичной дроби имеет

каждое рациональное число П
каждое действительное число
только целое число
только натуральное число

4. Представление в виде конечной цепной дроби имеет

каждое рациональное число П
каждое действительное число
только целое число
только натуральное число

5. Сумма рациональных чисел, представленных обыкновенными дробями, существует
для любых рациональных чисел П
только для целых чисел
только для натуральных чисел
только для положительных рациональных чисел
6. Произведение рациональных чисел, представленных обыкновенными дробями, существует
для любых рациональных чисел П
только для целых чисел
только для натуральных чисел
только для положительных рациональных чисел

7. Разность рациональных чисел, представленных обыкновенными дробями, существует
для любых рациональных чисел П
только для целых чисел
только для натуральных чисел
только для положительных рациональных чисел

8. Частное рациональных чисел a, b, представленных обыкновенными дробями, существует
для любого a и b
для любого a и любого $b \neq 0$ П
для любого a и $b>a$
для любого a и $b<a$

9. Умножение рациональных чисел, представленных обыкновенными дробями,

коммутативно П
ассоциативно П
не коммутативно
не ассоциативно

10. Сложение рациональных чисел, представленных обыкновенными дробями,

коммутативно П
ассоциативно П
не коммутативно
не ассоциативно

ДЕ 10. Десятичная дробь

1. Бесконечной десятичной дробью можно представить
только рациональное число
каждое действительное число П
только целое число
только натуральное число

2. Вычитание действительных чисел

коммутативно
ассоциативно
не коммутативно П
не ассоциативно П

3. Деление действительных чисел

коммутативно
ассоциативно
не коммутативно П
не ассоциативно П

4. Представление в виде бесконечной цепной дроби имеет

каждое рациональное число
каждое иррациональное число П
только целое число
только натуральное число
5. Сумма действительных чисел единственна
для любых действительных чисел П
только для целых чисел
только для натуральных чисел
только для положительных рациональных чисел
6. Произведение действительных чисел единственно
для любых действительных чисел П
только для рациональных чисел

только для натуральных чисел
только для положительных рациональных чисел

7. Разность действительных чисел единственна
для любых действительных чисел П
только для целых чисел
только для рациональных чисел
только для положительных рациональных чисел

8. Частное действительных чисел a, b существует
для любого a и b
для любого a и любого $b \neq 0$ П
для любого a и $b>a$
для любого a и $b<a$

9. Умножение действительных чисел

коммутативно П
ассоциативно П
не коммутативно
не ассоциативно

10. Сложение действительных чисел

коммутативно П
ассоциативно П
не коммутативно
не ассоциативно

ДЕ 11. Иррациональное число

1. Число $\sqrt{2}$ можно представить

в виде обыкновенной дроби
в виде конечной десятичной дроби
в виде периодической десятичной дроби
в виде непериодической десятичной дроби П

2. Число $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ можно представить

в виде обыкновенной дроби
в виде конечной десятичной дроби
в виде периодической десятичной дроби
в виде непериодической десятичной дроби П

3. Множество рациональных чисел

несчетно

счетно П
конечно
бесконечно П
континуально

4. Множество иррациональных чисел

несчетно П
счетно
конечно
бесконечно П
континуально П

5. Сумма рационального и иррационального чисел является числом

иррациональным П
рациональным
целым
натуральным

6. Произведение рационального и иррационального чисел является числом

иррациональным П
рациональным
целым
натуральным

7. Разность рационального и иррационального чисел является числом

иррациональным П
рациональным
целым
натуральным

8. Частное рационального и иррационального чисел является числом

иррациональным П
рациональным
целым
натуральным

9. Произведение рациональных чисел является числом

иррациональным
рациональным П
всегда целым
всегда натуральным

10. Сумма рациональных чисел является числом

иррациональным
рациональным П
всегда целым
всегда натуральным

Вопросы для дифференцированного зачета.

Докажите, что:

1. Аксиоматика Пеано непротиворечива, если непротиворечива теория множеств.
2. Аксиоматика Пеано независима.
3. Содержательная арифметика категорична.
4. Сумма целых неотрицательных чисел в системе Пеано единственна, если существует.
5. Сумма целых неотрицательных чисел в системе Пеано существует.
6. Произведение целых неотрицательных чисел в системе Пеано единственно, если существует.
7. Произведение целых неотрицательных чисел в системе Пеано существует.
8. Сложение целых неотрицательных чисел в системе Пеано коммутативно.
9. Сложение целых неотрицательных чисел в системе Пеано ассоциативно.
10. Умножение целых неотрицательных чисел в системе Пеано коммутативно.
11. Умножение целых неотрицательных чисел в системе Пеано ассоциативно.
12. Сложение и умножение целых неотрицательных чисел в системе Пеано связаны дистрибутивным законом.
13. Сложение целых неотрицательных чисел в системе Пеано обладает свойством сократимости.
14. Умножение целых неотрицательных чисел в системе Пеано обладает свойством сократимости.
15. Отношение делимости на множестве целых неотрицательных чисел является отношением частичного порядка.
16. Отношение $\leq$ на множестве целых неотрицательных чисел в системе Пеано является отношением линейного дискретного порядка.
17. Множество целых неотрицательных чисел в системе Пеано вполне упорядочено.
18. Множество целых неотрицательных чисел в системе Пеано архимедовски упорядочено.
19. Сложение целых неотрицательных чисел в системе Пеано монотонно.
20. Умножение целых неотрицательных чисел в системе Пеано монотонно.
21. Множество чисел в системе Пеано, состоящее из всех целых неотрицательных чисел, не превосходящих данное число, конечно
22. В арифметике можно формульно выразить, доказуема формула или нет.
23. Множество *M*, состоящее из номеров формул, недоказуемых на своем номере, формульно описывается в теории.
24. Непротиворечивость теории формульно выразима.
25. Неполнота теории формульно выразима.
26. Аксиоматическая теория, содержащая арифметику, неполна.
27. Каждое полукольцо вложимо в кольцо.
28. Полукольцо натуральных чисел изоморфно вложимо в поле.
29. Аксиоматическая теория целых чисел непротиворечива, если непротиворечива аксиоматическая теория натуральных чисел.
30. Каждая коммутативная полугруппа с сокращением вложима в группу.

31. Каждое кольцо вложимо в неизоморфное ему кольцо.
32. Каждое поле вложимо в неизоморфное ему поле.
33. Аксиоматическая теория целых чисел категорична, если категорична аксиоматическая теория натуральных чисел.
34. Найдите полугруппу эндоморфизмов и группу автоморфизмов аддитивной полугруппы натуральных чисел и полукольца натуральных чисел.
35. Найдите полугруппу эндоморфизмов и группу автоморфизмов аддитивной группы целых чисел и кольца целых чисел.
36. Аксиоматическая теория рациональных чисел непротиворечива, если непротиворечива аксиоматическая теория натуральных чисел.
37. Аксиоматическая теория рациональных чисел категорична, если категорична аксиоматическая теория натуральных чисел.
38. Поле рациональных чисел линейно упорядочиваемо.
39. Порядок поля рациональных чисел является плотным и архимедовым.
40. Аддитивная группа целых чисел неразложима в прямую сумму своих подгрупп.
41. Не существует гомоморфизма аддитивной группы рациональных чисел на мультипликативную группу положительных рациональных чисел.
42. Аддитивная группа действительных чисел изоморфна мультипликативной группе положительных действительных чисел.
43. Мультипликативная группа рациональных ненулевых чисел содержит континуум различных подгрупп.
44. Каждая конечная абелева группа является гомоморфным образом мультипликативной группы рациональных ненулевых чисел.
45. Никакая конечная, отличная от единичной, группа не является гомоморфным образом аддитивной группы рациональных чисел.
46. Найдите полугруппу эндоморфизмов и группу автоморфизмов аддитивной группы рациональных чисел.
47. Группа автоморфизмов мультипликативной группы положительных рациональных чисел несчетна.
48. Найдите полугруппу эндоморфизмов и группу автоморфизмов поля рациональных чисел.
49. Поле рациональных чисел не содержит ни одного собственного подполя, но содержит континуум различных подколец.
50. Поле рациональных чисел не имеет автоморфизмов, отличных от тождественного автоморфизма.
51. Каждое тело характеристики нуль содержит в точности одно подкольцо, изоморфное кольцу целых чисел.
52. Каждое тело характеристики нуль содержит в точности одно подкольцо, изоморфное кольцу рациональных чисел.
53. Аксиоматическая теория действительных чисел непротиворечива, если непротиворечива аксиоматическая теория натуральных чисел.
54. Найдите группу автоморфизмов поля действительных чисел.
55. Поле действительных чисел содержит бесконечное множество неизоморфных подполей.
56. Содержательная аксиоматическая теория натуральных чисел категорична.
57. Аксиоматическая теория целых чисел категорична, если категорична аксиоматическая теория натуральных чисел.
58. Аксиоматическая теория рациональных чисел категорична, если категорична аксиоматическая теория натуральных чисел.

59. Аксиоматическая теория действительных чисел категорична, если категорична аксиоматическая теория натуральных чисел.
60. Конечномерная ассоциативная линейная алгебра без делителей нуля является алгеброй с делением.
61. Если линейная алгебра над полем *P* содержит единицу, то поле *P* изоморфно вложимо в центр этой алгебры.
62. Конечномерная ассоциативная линейная алгебра без делителей нуля является алгебраической.
63. Каждый элемент конечномерной действительной ассоциативной без делителей нуля линейной алгебры является корнем многочлена с действительными коэффициентами степени не выше второй.
64. Модуль произведения кватернионов равен произведению модулей сомножителей
65. Произведение двух сумм четырех квадратов само является суммой четырех квадратов.
66. Алгебра кватернионов является телом.
67. В группе кватернионов все подгруппы являются нормальными делителями.
68. Одно-порожденная действительная конечномерная ассоциативная без делителей нуля алгебра изоморфна полю действительных чисел или полю комплексных чисел
69. Размерность конечномерной действительной ассоциативной без делителей нуля линейной алгебры может принимать лишь значения 1, 2, 4.
70. Если два-порожденная действительная конечномерная ассоциативная без делителей нуля алгебра не изоморфна ни полю действительных чисел, ни полю комплексных чисел, то она изоморфна телу кватернионов.
71. Действительных ассоциативных без делителей нуля линейных алгебр размерности три не существует.
72. Действительных ассоциативных без делителей нуля линейных алгебр размерности больше четырех не существует.
73. Единственной конечномерной ассоциативной без делителей нуля линейной алгеброй над полем комплексных чисел является само поле комплексных чисел.
74. Аксиоматическая теория комплексных чисел непротиворечива, если непротиворечива аксиоматическая теория натуральных чисел.
75. Аксиоматическая теория гиперкомплексных чисел непротиворечива, если непротиворечива аксиоматическая теория натуральных чисел.

9. Учебно-методическое и информационное обеспечение

9.1. Основная литература

1. Балюкевич, Э. Л. Алгебра и теория чисел : учебное пособие / Э. Л. Балюкевич, З. В. Алферова, А. Н. Романников. — Москва : Евразийский открытый институт, 2011. — 278 c. — ISBN 978-5-374-00535-6. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: http://www.iprbookshop.ru/10599.html (дата обращения: 10.10.2020). — Режим доступа: для авторизир. пользователей

2. Веселова, Л. В. Алгебра и теория чисел : учебное пособие / Л. В. Веселова, О. Е. Тихонов. — Казань : Казанский национальный исследовательский технологический университет, 2014. — 107 c. — ISBN 978-5-7882-1636-2. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: http://www.iprbookshop.ru/61956.html (дата обращения: 10.10.2020). — Режим доступа: для авторизир. пользователей

9.2. Дополнительная учебная литература:

1. Веретенников, Б. М. Алгебра и теория чисел. Часть 1 : учебное пособие / Б. М. Веретенников, М. М. Михалева ; под редакцией Н. В. Чуксина. — Екатеринбург : Уральский федеральный университет, ЭБС АСВ, 2014. — 52 с. — ISBN 978-5-7996-1193-4. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: http://www.iprbookshop.ru/66141.html (дата обращения: 10.10.2020). — Режим доступа: для авторизир. пользователей
2. Сикорская, Г. А. Алгебра и теория чисел : учебное пособие / Г. А. Сикорская. — Оренбург : Оренбургский государственный университет, ЭБС АСВ, 2017. — 304 с. — ISBN 978-5-7410-1943-6. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: http://www.iprbookshop.ru/78763.html (дата обращения: 10.10.2020). — Режим доступа: для авторизир. пользователей
3. Веретенников, Б. М. Алгебра и теория чисел : учебное пособие для СПО / Б. М. Веретенников, М. М. Михалева ; под редакцией Н. В. Чуксиной. — 2-е изд. — Саратов, Екатеринбург : Профобразование, Уральский федеральный университет, 2019. — 49 с. — ISBN 978-5-4488-0405-2, 978-5-7996-2856-7. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: http://www.iprbookshop.ru/87784.html (дата обращения: 10.10.2020). — Режим доступа: для авторизир. пользователей
4. Сикорская, Г. А. Алгебра и теория чисел : учебное пособие для СПО / Г. А. Сикорская. — Саратов : Профобразование, 2020. — 303 с. — ISBN 978-5-4488-0612-4. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: http://www.iprbookshop.ru/91847.html (дата обращения: 10.10.2020). — Режим доступа: для авторизир. пользователей

9.3. Ресурсы информационно-телекоммуникационной сети Интернет:

1. Базовые федеральные образовательные порталы . < http://www.edu.ru/db/portal/sites/portal_page.htm >.
2. Государственная публичная научно - техническая библиотека . < www.gpntb.ru/ >.
3. Информационно - коммуникационные технологии в образовании . Система федеральных образовательных порталов . < http://www.ict.edu.ru/ >.
4. Национальная электронная библиотека . < www.nns.ru/ >..
5. Поисковая система « Апорт ». < www.aport.ru/ >.
6. Поисковая система « Рамблер ». < www.rambler.ru/ >.
7. < www.yahoo.com/ >. Поисковая система «Yahoo».
8. < www.yandex.ru/ >. Поисковая система « Яндекс ».
9. Российская государственная библиотека . < www.rsl.ru/ >.
10. Российская национальная библиотека . < www.nlr.ru/ >.

9.4. Информационные технологии:

Учебно-методическое, материально-техническое и информационное обеспечение дисциплины: электронная библиотека www.ibooks.ru,
электронные учебники,
учебная обязательная и дополнительная литература,
учебно-методический комплекс по дисциплине,
локальная сеть КамГУ им. Витуса Беринга, учебные специализированные аудитории с оборудованием
Лицензионный пакет математических символьных вычислений *MAPLE*
Использование слайд-презентаций при проведении лекций и отдельных семинаров.
Консультация, проверка проблемных вопросов посредством электронной почты.

Участие в Интернет-экзамене в сфере профессионального обучения (ФЭПО).
В рамках изучения дисциплины задействована электронная информационно-образовательная среда вуза: в локальной сети размещены материалы по дисциплине (планы семинарских и практических занятий, памятки психолога с возрастными нормами, задания для самостоятельной работы, вопросы к зачету и экзамену, электронные учебники и др.). На аудиторных занятиях применяются мультимедийные презентации.

10.Формы и критерии оценивания учебной деятельности студента

На основании разработанной компетентностной модели выпускника образовательные цели представлены в виде набора компетенций как планируемых результатов освоения образовательной программы. Определение уровня достижения планируемых результатов освоения образовательной программы осуществляется посредством оценки уровня сформированности компетенции и оценки уровня успеваемости обучающегося по пятибалльной системе («отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно», «зачтено», «не зачтено»).

Основными критериями оценки в зависимости от вида работы обучающегося являются: сформированность компетенций (знаний, умений и владений), степень владения профессиональной терминологией, логичность, обоснованность, четкость изложения материала, ориентирование в научной и специальной литературе.

Текущий контроль

Уровень освоения компетенции	**Уровень освоения дисциплины (оценка)**	**Форма текущего контроля**		
		Устный опрос (сообщение, доклад, реферат, домашняя работа и др.)	**Письменный опрос (решение (составление) задач, тестов, оформление проектов документов и пр.)**	**Лабораторная работа**
		Универсальные критерии оценивания		
Высокий	Отлично	Продемонстрированы глубокие знания программного материала, а также сформированность всех дескрипторов компетенции: знаний, умений, навыков. Ответы логически последовательны, содержательны. Стиль изложения научный. Применение умений и навыков	Верно решено (выполнено) от 91 до 100 % заданий (задач)	Все задания выполнены верно, оформление работы соответствует требованиям, студентом дан четкий безошибочный ответ на все поставленные вопросы.

		уверенное.		
Базовый	Хорошо	Продемонстрированы глубокие знания программного материала, а также успешная сформированность дескрипторов компетенции: знаний, умений, навыков. Ответы логически последовательны, содержательны. Стиль изложения научный. Вместе с тем, студентом допущены ошибки, имеет место пробелы в умениях и навыках.	Верно решено (выполнено) от 76 до 90 % заданий (задач)	Все задания выполнены верно, оформление работы соответствует требованиям, студент ответил на поставленные вопросы с замечаниями.
Пороговый	Удовлетворительно	Продемонстрированы не достаточные знания программного материала, имеются затруднения в понимании сущности и взаимосвязи рассматриваемых процессов и явлений. Сформированы дескрипторы компетенции: знания, умения, навыки порогового уровня.	Верно решено (выполнено) от 50 до 75 % заданий (задач)	Все задания выполнены с замечаниями; оформление работы имеет замечания, студент ответил на поставленные вопросы с замечаниями
Компетенции не сформированы	Неудовлетворительно	Ответ фрагментарен, нелогичен. Студент не осознает связь обсуждаемого вопроса с другими вопросами дисциплины. Терминология не используется. Дескрипторы компетенции: знания, умения,	Верно решено (выполнено) менее 50 % заданий (задач)	Задания выполнены неправильно (не выполнены), оформление работы имеет замечания, студент ответил на поставленные вопросы с

		навыки не сформированы (теоретические знания разрознены, умения и навыки отсутствуют) // Либо ответ на вопрос полностью отсутствует или студент отказывается от ответа.		ошибками или не ответил на поставленные вопросы.

Промежуточная аттестация

Уровень сформированности компетенции	Уровень освоения дисциплины (оценка)	Форма промежуточной аттестации			
		Зачет	~~Дифференцированный зачет~~	Экзамен	Защита курсовой работы
		Универсальные критерии оценивания			
Высокий	зачтено // отлично	Продемонстрированы глубокие знания программного материала, а также сформированность всех дескрипторов компетенции: знаний, умений, навыков. Ответы логически последовательны, содержательны. Стиль изложения научный. Применение умений и навыков уверенное.		Продемонстрировано всестороннее и глубокое освещение избранной темы (проблематики), а также умение работать с источниками, делать теоретические и практические выводы. Ответ логически последователен, содержателен. Стиль изложения научный с использованием терминологии.	
Базовый	зачтено // хорошо	Продемонстрированы глубокие знания программного материала, а также успешная сформированность дескрипторов компетенции: знаний, умений, навыков. Ответы логически последовательны, содержательны. Стиль изложения научный. Вместе с тем, студентом допущены ошибки, имеет место пробелы в умениях и навыках.		Продемонстрировано глубокое освещение избранной темы (проблематики), а также умение работать с источниками, делать теоретические и практические выводы. Ответ логически последователен, содержателен. Стиль изложения научный с использованием терминологии. Вместе с тем, студентом допущены ошибки.	
Пороговый	зачтено // удовлетвор	Продемонстрированы не достаточные знания		Продемонстрировано в основном владение	

	ительно	программного материала, имеются затруднения в понимании сущности и взаимосвязи рассматриваемых процессов и явлений. Сформированы дескрипторы компетенции: знания, умения, навыки порогового уровня.	материалом, а также умение работать с источниками, делать выводы. Вместе с тем, недостаточно четко отражены результаты исследования, студентом допущены ошибки.
Компетенции не сформированы	не зачтено // неудовлетворительно	Ответ фрагментарен, нелогичен. Студент не осознает связь обсуждаемого вопроса с другими вопросами дисциплины. Терминология не используется. Дескрипторы компетенции: знания, умения, навыки не сформированы (теоретические знания разрознены, умения и навыки отсутствуют) // Либо ответ на вопрос полностью отсутствует или студент отказывается от ответа.	Ответ фрагментарен, нелогичен. Студент не осознает связь обсуждаемого вопроса (проблематики исследования) с другими вопросами дисциплины. Терминология не используется. Теоретические знания разрознены, умения и навыки отсутствуют // Либо ответ на вопрос полностью отсутствует или студент отказывается от ответа.

11. Материально-техническая база

Используемые инструментальные и программные средства. Программное обеспечение: библиотека, электронная библиотека, локальная сеть КамГУ им. Витуса Беринга, учебные специализированные аудитории с оборудованием. В рамках изучения дисциплины применяется доска, мультимедийный проектор для демонстрации презентаций и видеоматериалов.